Boltzmann型方程式の大域解の存在について (生物モデルの数学)

鵜飼, 正二

数理解析研究所講究録
195巻 1973年 41-51

Boltzmann型方程式の大域解の存在について

大市大　工　　鵜飼正二

§1. 序

気体の運動は謂ゆるBoltzmann方程式によって記述される。今，気体は一種類の粒子から成るとし，粒子の位置を $x=(x_1, x_2, x_3)\in R^3$，速度を $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in R^3$，粒子密度を $u(t,x,\xi)$（tは時刻，≥ 0）で表わすことにすれば，Boltzmann方程式は

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{3}\xi_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Q[u] \text{。}$$

但し外力（重力 etc.）は無いと仮定した。$Q[u]$は衝突項であり，

(2) $$Q[u] = \iint_{R^3\times S^2} k(\xi,\xi',\omega)\{u(\xi_1)u(\xi_1') - u(\xi)u(\xi')\}\,d\xi' d\omega,$$

ここに $\omega\in S^2$ は衝突パラメーター，ξ_1, ξ_1' は共に ξ, ξ', ω の関数で，速度 ξ の粒子と ξ' の粒子が衝突パラメーター ω でもって衝突した後の夫々の粒子の速度を表わし，$k(\xi,\xi',\omega)$ は粒子の相互作用ポテンシャルにより定まる関数である。又 $u(\xi)=u(t,x,\xi)$

等である。

粒子密度の空間分布が一様と仮定すれば，Eq.(1)で左辺第一項，$-\sum \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$，は落ちるが，この場合のEq.(1)に対する初期値問題の大域解の存在は，様々なポテンシャルに対し証明されている。[1][2][3]

ところが空間変数を含む場合に対しては局所解の存在しかわかっていない[4][5]。そこで，ここでは，Eq.(2)の衝突項を少し特殊化（一般化？）した

$$(3)\quad Q[u] = \iiint k(\xi,\xi';\xi_1,\xi_1')\,u(\xi_1)\,u(\xi_1')\,d\xi'\,d\xi_1\,d\xi_1' - \iiint k(\xi_1,\xi_1';\xi,\xi')\,u(\xi)\,u(\xi')\,d\xi'\,d\xi_1\,d\xi_1'$$

に対し，Eq.(1)の大域解が存在するための k に対する1つの十分条件を与えよう。（残念ながら実在の気体には適用できないようであるが……。）物理的には非負解のみを考えれば十分である。

§2. ある種の非線型発展方程式

まず問題を少し抽象化して，以下のような発展方程式を考えよう。~~Xを単位元eを持つBanach ringとし，~~そのノルムを$\|\ \|$とする。さらにXは閉錐体Kを持つとし，Xに半順序$\leq$を導入する。($u \leq v \Leftrightarrow v-u \in K$)。$K$は次の性質を持つとする: $e \in K$，$u, v \in K$ ならば $uv \in K$，$0 \leq u \leq v$ ならば $\|u\| \leq \|v\|$.

$u \in K$ ならば　$u \leq \|u\| e$ 。

最後に c を正定数として，

$$K_c = \{u \in K \,;\, \|u\| \leq c\} = \{u \in X \,;\, 0 \leq u \leq ce\}$$

を定義する。K_c は閉集合である。

次の条件を満す作用素 A 及び Q を考える。

条件[A]．A は定義域 $\mathcal{D}(A) \subseteq X$，$\overbrace{\mathcal{R}(A)}^{\text{値域}} \subseteq X$ なる線型作用素で，

[A-1]　X 上の強連続縮小半群 $E(t) = e^{tA}$ を生成する，

[A-2]　$E(t) K \subseteq K$，　$t \geq 0$ ．

条件[Q]．Q は非線型作用素であって

$$Q[u] = Q_1[u] - u Q_2[u]$$

なる形を持つとする。但し Q_i $(i=1,2)$ は $\mathcal{D}(Q_i) = X$，$\mathcal{R}(Q_i) \subseteq X$ なる(非線型又は線型)作用素で，かつ

[Q-1]　局所 Lipschitz 連続である；$\forall u, v \in X$ に対し

$$\|Q_i[u] - Q_i[v]\| \leq q_i(\|u\|, \|v\|) \|u - v\| \qquad (i=1,2)$$

但し $q_i(x_1, x_2)$ は $R^2 \longmapsto R$ なる写像で，R^2 の有界集合を R^1 の有界集合に写す，

[Q-2]　$Q_i[K] \subseteq K$，$(i=1,2)$，

[Q-3]　次の条件を満す正定数 c と(非線型)作用素 S が存在する；S は局所 Lipschitz 連続で，

$$S[K] \subseteq K \text{，かつ } \forall u \in K_c \text{ に対し}$$

$$Q[u] \leq (Ce - u) S[u] \text{。}$$

さて $\mathcal{D}(A)$ で定義された作用素 $A+Q$ に対する発展方程式

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Q[u] \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

を考えるのであるが，ここでは簡単のため (4) から導びかれる積分方程式

$$(5) \quad u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-t')Q[u(t')]dt', \quad t \geq 0,$$

について考える。

定理 1. 条件 [A]，[Q] の下で，任意の初期値 $u_0 \in K_c$ に対し，$u \in C_t^0([0,\infty); K_c)$ なる (5) の解 $u = u(t)$ が唯一つ存在する。

証明には次の逐次近似法を用いる。

$$(6) \quad \begin{cases} u^n(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-t')\{R_1[u^{n-1}(t')] - u^n(t')R_2[u^{n-1}(t')]\}dt' \\ \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \cdots\cdots, \\ u^0(t) = 0 \end{cases}$$

但し

$$R_1[u] = Q_1[u] + uS[u], \quad R_2[u] = Q_2[u] + S[u].$$

$R_1[u] - uR_2[u] = Q[u]$ であるから，(6)は(5)の近似法を与えている。ところで(6)は u^n について解けて，

(7) $$u^n = H[u^{n-1}], \ n \geq 1, \quad u^0 = 0,$$

(8) $$H[u] \equiv U(t,0;u)u_0 + \int_0^t U(t,s;u)R_1[u(s)]\,ds$$

ここで $U(t,s;u)$ は X 上の非線型作用素で，積分方程式

(9) $$U(t,s;u) = E(t-s) - \int_s^t E(t-t')R_2[u(t')]U(t',s;u)\,dt', \quad t \geq s \geq 0$$

の(一意)解である。但し $u \in C_t^0([0,\infty);X)$ は与えられた関数，右辺の $R_2[u(t')]$ は乗法作用素と考える。(6)$\Leftrightarrow$(7) は明らかであろう。(9)の代りに方程式

(10) $$w(t,s) = f(t,s) - \int_s^t E(t-t')R_2[u(t')]w(t',s)\,dt', \quad t \geq s \geq 0$$

を考える。$f(t,s) = E(t-s)u_0$ ならば $w(t,s) = U(t,s;u)u_0$.

補題 1. $u(t) \in K$ $(t \geq 0)$ ならば $U(t,s;u)K \subseteq K$ かつ $\|U(t,s;u)\| \leq 1$ である。$(t \geq s \geq 0)$.

証明。$\alpha = \sup_{0 \leq t \leq T} \|R_2[u(t)]\|$，$E_\alpha(t) = e^{-\alpha t}e^{tA}$ とおく。(10)の両辺に $E_\alpha(t_1 - t)$ を施し t に関して $[s, t_1]$ で積分する。$E_\alpha(t_1-t)E(t-t') = e^{\alpha(t-t')}E_\alpha(t_1-t')$ であるから

$$\int_s^{t_1} E_\alpha(t_1-t)w(t,s)dt = \int_s^{t_1} E_\alpha(t_1-t)f(t,s)dt - \frac{1}{\alpha}\int_s^{t_1} E(t-t')R_2[u(t')]w(t',s)dt'$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_s^{t_1} E_\alpha(t-t')R_2[u(t')]w(t',s)dt'$$

これと(10)を合せると結局

$$(11)\quad w(t,s) = f(t,s) - \alpha\int_s^t E_\alpha(t-t')f(t',s)dt' +$$
$$+\int_s^t E_\alpha(t-t')\{\alpha e - R_2[u(t')]\}w(t',s)dt'$$

を得る。ここで $f(t,s)=e^{(t-s)A}u_0$ とおくと，$u_0\in K$ ならば，

$$f(t,s) - \alpha\int_s^t E_\alpha(t-t')f(t',s)dt' = E(t-s)u_0 - \alpha\int_s^t e^{\alpha(t'-t)}dt' E_1(t-s)u_0 =$$
$$= E_\alpha(t-s)u_0 \in K$$

一方，Kの性質と条件[Q]により $0\le R_2[u(t')] \le \|R_2[u(t')]\| e \le \alpha e$，よって $\alpha e - R_2[u(t')]\in K$，$0\le t'\le T$，よって(11)の解をNeumann級数で求めることにすれば，その各項は$\in K$，Kは閉集合であるから，結局 $w(t,s)=U(t,s;u)u_0\in K$，$0\le s\le t\le T$，又(10)から直ちに $0\le w(t,s)\le f(t,s)=E(t-s)u_0$ が得られるが，Kの性質により，$\|w(t,s)\|\le\|E(t-s)u_0\|\le\|u_0\|$，ここで(A-1)を用いた。よって $0\le s\le t\le T$ で補題が成り立つが，Tは任意であるから補題は証明された。

補題 2. $f(t,s)=e-E(t)e$ に対する(10)の解 $w(t,s)$ はKに属

する。$(t \geq s \geq 0)$

証明. $f(t,s) - \alpha \int_s^t E_\alpha(t-s') f(s',s)\,ds' = e - E(t)e -$

$$- \alpha \int_s^t E_\alpha(t-t') e\,dt' + \alpha \int_s^t e^{-\alpha(t-s')} ds'\, E(t) e$$

ところで，$0 \leq E(t)e \leq \| E(t) e \| e \leq e$ を上式右辺第3項に代入し，$\alpha \int_s^t e^{-\alpha(t-t')} dt' = 1 - e^{-\alpha(t-s)}$ を用いれば，

$$f(t,s) - \alpha \int_s^t E_\alpha(t-t') f(t',s)\,dt' \geq e^{-\alpha(t-s)} (e - E(t)e) \geq 0$$

よって (11) の右辺の source term は $\in K$ である。残りは補題1の証明と同じである。

さて (8) で定義された作用素 H を考える。

補題3. $u_0 \in K_c$, $u(t) \in K_c \Rightarrow H[u] \in K_c$

証明. [Q-3] より

$$H[u] \leq U(t,0;u)\,u_0 + \int_0^t U(t,s;u) \left[Q_2[u(s)]\,u(s) + C\,S[u(s)] \right] ds$$

$u(t) \in K_c$，すなわち $0 \leq u(t) \leq Ce$ より，

$$H[u] \leq U(t,0;u)\,u_0 + C \int_0^t U(t,s;u)\, R_2[u(s)]\,ds$$

一方 (9) の両辺を $R_2[u(s)]$ に施したものを s について $[0,t]$ で積分すると，積分順序の交換により

$$\int_0^t U(t,s;u) R_2[u(s)]\,ds = \int_0^t E(t-s) R_2[u(s)]\,ds - \int_0^t E(t-s) R_2[u(s)] \times$$
$$\times \int_0^s U(s,s';u) R_2[u(s')]\,ds'$$

即ち　$v(t)=e-\int_0^t U(t,s;u)R_2[u(s)]ds$　とおけば

$$v(t)=e-\int_0^t E(t-t')R_2[u(t')]v(t')dt'$$

を得る。一方 $s=0$, $f(t,s)=E(t)e$ とした(10)の解は $U(t,0;u)e$ で与えられるから，補題2 により　$v(t)\geqq U(t,0,u)e$　を得る。よって

$$H[u]\leqq U(t,0;u)u_0+c(e-U(t,0,u)e)\leqq ce$$

ここで $u_0\in K_c$ と補題1を用いた。又 $H[u]\geqq 0$ は (8)と補題1から得られるから補題の証明終り。

[定理1の証明]　(7)において $u^0=0\in K_c$ だから，補題3 からすべての $n\geqq 0$ に対し $u^n\in K_c$ がわかる。これと R_i の局所 Lipschitz より，$u_n\in C_t^0([0,\infty);K_c)$ と，任意の t の有限区間で一様に

$$u_n(t)\longrightarrow {}^{\exists}u(t)\quad(n\to\infty)\quad\text{in } X$$

となることが，通常の議論から従う。$u(t)$ は $(5)\Leftrightarrow u=H[u]$ の唯一つの解であることもわかる。K_c の閉性より $u(t)\in K_c$。(証了)

§3．Boltzmann型方程式

$Q[u]$ が(3)で与えられる方程式(1)を考えよう。少し一般化して，n 次元空間で考えることにする。$x\in R^n$, $\xi\in R^n$。今の目的には $X=\mathcal{B}^0(R^{2n})$, $\|u\|=\sup_{(x,\xi)\in R^{2n}}|u(x,\xi)|$,　$K=\mathcal{B}^0_+(R^{2n})=$

$=\{u(x,\xi)\in\mathcal{B}^0(R^{2n})\ ;\ u(x,\xi)\geqq 0\ \text{ in } R^{2n}\}$ ととればよい。明らかに $e=e(x,\xi)\equiv 1$ で，$u\leq v$ はR^{2n}のすべての点での $u(x,\xi)\leq v(x,\xi)$ を意味し，又 K に対する §2 の条件はすべて満されている。

作用素 A は今の場合

$$\begin{cases}\mathcal{D}(A)=\{u\in\mathcal{B}^0(R^{2n})\ ;\ \sum_{i=1}^{n}\xi_i u_{x_i}(x,\xi)\in\mathcal{B}^0(R^{2n})\}\\ (Au)(x,\xi)=-\sum_{i=1}^{n}\xi_i\dfrac{\partial u(x,\xi)}{\partial x_i}\end{cases}$$

である。容易に

$$E(t)u=e^{tA}u=u(x-t\xi,\xi)$$

であることがわかり，条件[A]は満されている。

作用素 Q については，条件[Q-1]は (3) から

$$[k-1]\quad\begin{cases}\iiint|k(\xi,\xi';\xi_1,\xi_1')|\,d\xi'd\xi_1d\xi_1'\leq\ ^{\exists}k_0<+\infty\\ \iiint|k(\xi_1,\xi_1';\xi,\xi')|\,d\xi'd\xi_1d\xi_1'\leq\ ^{\exists}k_1<+\infty\end{cases}$$

ならば満される。k_0, k_1 は ξ に依らない定数。[Q-2]は

$$[k-2]\qquad k(\xi,\xi';\xi_1,\xi_1')\geqq 0\quad\text{ in } R^{4n}$$

ならば満される。[Q-3] は [k-1] [k-2] の他に

$$[k-3]\qquad\iint k(\xi,\xi_1;\xi',\xi_1')\,d\xi_1d\xi_1'\leq\iint k(\xi_1,\xi_1';\xi,\xi')\,d\xi_1d\xi_1',\ ^{\forall}\xi,\xi'\in R^n$$

が成り立てば満される。以下その証明

$$Q[u]=\iiint k(\xi,\xi';\xi_1,\xi_1')\,u(\xi_1)\{u(\xi_1')-u(\xi)\}\,d\xi'd\xi_1d\xi_1'+$$

$$+\int\left\{\iiint\{k(\xi,\xi_1;\xi',\xi_1')-k(\xi_1,\xi_1';\xi,\xi')\}d\xi_1 d\xi_1' u(\xi')u(\xi)\,d\xi'\right.$$

であるから，$u\in K_c=\{u\in\mathcal{B}^0;\ 0\leq u(x,\xi)\leq c,\ \forall x,\xi\in R^n\}$ とすれば［k-2］［k-3］より上式右辺の最後の項は落ち，第1項の｛ ｝の $u(\xi_1')$ は c で置き代えることができて，

$$Q[u]\leq(c-u(\xi))\iiint k(\xi,\xi';\xi_1,\xi_1')u(\xi_1)\,d\xi' d\xi_1' d\xi_1$$

最後の積分作用素が $S[u]$ である。よって定理1から直ちに

定理2.　条件［k-1］,［k-2］,［k-3］の下で，方程式(1)(3)に対応する積分方程式(5)は任意の初期値 $u_0\in\mathcal{B}^0_+(R^{2n})$ に対し唯一つの解 $u(t)\in C^0_t([0,\infty);\mathcal{B}^0_+(R^{2n}))$ を持つ。さらに $\|u(t)\|\leq\|u_0\|$ である。

今の場合 $c=\|u_0\|$ ととればよいことは明らかであろう。

外力がある場合や，反射壁や吸収壁を持つ容器の中にある気体についても定理2は成り立つ。又 $A=-\Delta$ についても同様である。いずれの場合も条件［A］が成り立っているからである。

条件［k-3］は，ξ が離散的な場合の山口－三村［6］のそれの拡張である。

参考文献

[1] Carlemann, T.; "Problemes Mathematiques dans la Theorie Cinetiques des Gaz." Uppsala 1957.

[2] Morgenstern, D.; J. Rational Mech. Anal., 4, 533-555 (1955).

[3] Arkeryd, L.; Arch. Rat. Mech. Anal. 45, 1-34 (1972).

[4] Grad, H.; Proc. Amer. Math. Soc. Symposium on Applications of Partial Differential Equations, New York, April, 154-182 (1964).

[5] Glikson, A.; Arch. Rat. Mech. Anal. 45, 35-46 (1972).

[6] Mimura, M.; 本講究録.